Г-15

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.А.Галеев, В.И.Карпман N 1

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Новосибирск, 1962 г.

Аннотация

Рассмотрена ламинарная теория структуры ударных волн в разреженной плазме в сильном магнитном поле.

Показана неустойчивость ламинарной осцилляторной структуры по отношению к рождению хаотических волн.

Получено кинетическое уравнение для взаимодействующих волн. Даются оценки турбулентной ширины ударной волны.

SHOCK IN THE RAREFIED PLASMA IN A STRONG MAGNETIC FIELD.

ABSTRACTS.

The relationship between the "laminar" and "turbulent" theories of collisionfree plasma shock in a strong magnetic field is considered. The instability of the laminar oscillatory structure against generation of irregular plasma waves is demonstrated. It is derived the kinetic equation for these waves("quasi-particles"). The "turbulent" shock thickness is estimated.

§ I. Введение.

Как известно, динамика достаточно разреженной плазмы существенно определяется коллективными процессами, возникающими либо благодаря специфическим дисперсионным эффектам, либо вследствие неустойчивостей. Ударные волны в разреженной плазме должны рассматриваться с точки зрения коллективных процессов.

В работе /I/ была получена ламинарная структура фронта ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля в разреженной плазме в сильном магнитном поле ($p \ll H^2/8\pi$). В этой работе было показано, что профиль фронта ударной волны носит осцилляторный характер, если частота столкновений электронов с ионами ν_{ei} ,определяющая джоулеву диссипацию x), достаточно мала, а именно:

$$\nu_{ei} \ll \frac{c_A}{a(\mathcal{M}-1)}, \qquad (I.1)$$

где $\mathcal{M}$ - число Маха, $c_A = H^2/4\pi n m_i$ - ионная альфвеновская скорость, -длина электронной дисперсии

$$a = \frac{c}{\omega_{0e}} = c\sqrt{\frac{m_e}{4\pi n e^2}} \qquad (I.2)$$

определяющая ширину уединенной волны, получающейся из ударной, когда частота столкновений исчезает. Ширина фронта ударной волны при условии (I.I) может стать значительно больше длины свободного пробега (если $\sqrt{\frac{H^2}{8\pi n T}} \ll \frac{m_i}{m_e}$), что позволяет рассматривать такую волну как "бесстолкновительную" (именно в таком смысле мы и будем употреблять в дальнейшем этот термин).

Основную роль в формировании структуры фронта бесстолкновительных ударных волн, распространяющихся поперек магнитного поля, играют дисперсионные эффекты, обусловленные инерцией электронов, а основным параметром длины - длина электронной дисперсии (I.2) (подробнее см. /I,2/). Ионные волны, распространяющиеся поперек магнитного поля при частотах $\omega \ll \sqrt{\omega_{He}\cdot\omega_{Hi}}$, обладают, как известно, линейным законом дисперсии. Однако, ионная дисперсия начинает играть основную роль для бесстолкновительных ударных волн, распространяющихся не перпендикулярно к магнитному полю даже при очень малых отклонениях от перпендикулярности, а именно, $\theta \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$, где θ - угол между плоскостью фронта и направлением $\vec{H}$. Структура таких ударных волн при очень малых θ ($\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll \theta \ll 1$) была рассмотрена ранее в /3/, где показано,что в этом случае осцилляторный профиль коренным образом меняется по сравнению со случаем $\theta = 0$.

В § 3 настоящей работы рассматриваются ударные волны, распространяющиеся под любым углом к магнитному полю;кроме $\theta \lesssim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \frac{\pi}{2} - \theta \ll 1$. Оказывается,что профиль волны при этом сохраняет основные черты,имеющие место при $\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll \theta \ll 1$

В связи с возможностью так называемой "распадной неустойчивости" периодических волн /4/ возникает вопрос об устойчивости осцилляторной структуры бесстолкновительных ударных волн. Соответствующее исследование, излагаемое во второй части, показывает, что осцилляторная структура ударной волны, вообще говоря, неустойчива по отношению к распадам на другие колебания. Для оценки возникающей при этом турбулентности необходимо учитывать взаимодействие между отдельными колебаниями,образующимися при распаде. Это может быть сделано с

x) Другими видами диссипации при $p \ll \frac{H^2}{8\pi}$ можно пренебречь.

помощью полученного в § 4 из уравнений магнитной гидродинамики кинетического уравнения, описывающего "газ волн" с хаотически распределенными фазами. Это кинетическое уравнение оказывается совпадающим по структуре с кинетическим уравнением, предложенным из феноменологических соображений в /5/, однако в /5/ не содержится явного вида матричных элементов.

В § 5 рассмотрены некоторые приложения кинетической теории взаимодействующих волн к оценке величины турбулентных пульсаций, возникающих при распаде осцилляторной структуры ударной волны. Показано, что ширина осцилляторной структуры из-за возникновения турбулентных пульсаций сокращается и становится порядка

$$L \simeq \frac{c_A}{(M-1)^{3/2}\,\omega_H}$$

Интересно отметить, что угол между магнитным полем и направлением распространения ударной волны определяет спектр турбулентных пульсаций, но ширина турбулентной области от угла зависит очень слабо.

В интересующей нас области движений удобно пользоваться уравнениями магнитной гидродинамики с "ионной дисперсией" /6/. Их вывод дается в § 2.

§ 2. Основные уравнения магнитной гидродинамики с "ионной дисперсией".

Характерные частоты всех движений, рассматриваемых в этой работе, много меньше электронной ларморовской частоты. Кроме того, мы пренебрегаем отклонениями от квазинейтральности ($n_i = n_e = n$) и считаем плазму достаточно "холодной" ($p \ll H^2/8\pi$). При этих условиях уравнения для электронной и ионной компонент плазмы принимают вид:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e\vec{\mathcal{E}} + \frac{e}{c}[\vec{v}_i \cdot \vec{H}] + \nu_{ei} m_e \vec{v}_e \qquad (2.1)$$

$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{\mathcal{E}} - \frac{e}{c}[\vec{v}_e \cdot \vec{H}] - \nu_{ei} m_e \vec{v}_e \qquad (2.2)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{4\pi n e}{c}(\vec{v}_i - \vec{v}_e) \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}} \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{v}_i n) = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \qquad (2.5)$$

где ν_{ei} - эффективная частота столкновений электронов с ионами. Исключая теперь $\vec{\mathcal{E}}$ из (2.I)-(2.2) и (2.I)-(2.4) и подставляя $\vec{v}_e$ из (2.3) в (2.I), получим следующую систему уравнений (при этом предполагается, что $\nu_{ei} \ll \omega_{He}$):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = \frac{1}{4\pi n m}[\mathrm{rot}\,\vec{H} \cdot \vec{H}] \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}[\vec{V} \cdot \vec{H}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta \vec{H} - \frac{mc}{e}\mathrm{rot}\frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (2.7)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}(n\vec{V}) = 0, \quad \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \qquad (2.8)$$

Здесь и в дальнейшем v_i, m_i обозначены через V, m , а электропроводность σ выражается через частоту столкновений ν_{ei} соотношением:

$$\sigma = \frac{n e^2}{m_e \nu_{ei}} \qquad (2.9)$$

Уравнения (2.6)-(2.8) представляют собой систему основных уравнений разреженной плазмы, пригодную для описания движений с частотами сравнимыми и большими $\omega_H \equiv \omega_{Hi}$ - ионной ларморовской частоты. Область ее применимости определяется неравенствами

$$\omega \ll (\omega_H \cdot \omega_{He})^{1/2}, \quad \omega \ll \omega_{0i} = \left(\frac{4\pi n e^2}{m_i}\right)^{1/2}. \qquad (2.10)$$

Система (2.6)-(2.8) отличается от уравнений обычной магнитной гидродинамики холодной плазмы последним членом в уравнении (2.7), который становится малым при частотах много меньших ω_H . Этот член описывает характерные дисперсионные эффекты вблизи ω_H и поэтому систему (2.6)-(2.8) можно называть уравнениями "магнитной гидродинамики с ионной дисперсией".

Линеаризация этих уравнений приводит к дисперсионному уравнению вида

$$\omega_{1,2} = \frac{c_A}{2}\left(\sqrt{(k+k_y)^2 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2}k_y^2 k^2} \pm \sqrt{(k-k_y)^2 + \frac{c_A^2}{\omega_H^2}k_y^2 k^2}\right) \qquad (2.11)$$

где c_A - альфвеновская скорость, магнитное поле предполагается направленным вдоль оси y , а волновой вектор $\vec{k}$ лежит в плоскости XY, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Область применимости этого дисперсионного уравнения определяется условиями (2.10). Соответственно, оно эквивалентно дисперсионной формуле (3.56) работы /7/.

Малые возмущения магнитного поля и скорости ($\vec{h}, \vec{v}$) связаны между собой соотношениями:

$$h_y = -\frac{k_x}{k_y}h_x, \quad h_z = i\frac{c_A^2}{\omega_H}\frac{\omega k^2}{\omega^2 - k_y^2 c_A^2}h_x, \qquad (2.12)$$

$$v_x = \frac{c_A^2 k_x^2}{\omega k_y H}h_x, \qquad v_y = 0, \qquad v_z = \frac{c_A^2 k_y}{\omega H}h_z$$

§ 3. Дифференциальное уравнение, описывающее структуру.

В этом параграфе удобно выбрать систему координат так, чтобы ось X была направлена в направлении движения плазмы перед фронтом ударной волны, а плоскость XY проходила через направление напряженности $\vec{H}$ перед фронтом. В системе, где фронт покоится, величины n, $\vec{V}$ и $\vec{H}$ будут зависеть только от x.
Из уравнений непрерывности (2.8) получаем

$$n V_x \equiv j = const\,, \qquad H_x \equiv H_0 = const \tag{3.1}$$

При нашем выборе системы координат граничные условия при $x \to -\infty$ будут иметь вид

$$V_{1x} = u_1\,, \quad V_{1y} = V_{1z} = 0 \tag{3.2}$$

$$H_{1y} = H_1\,, \quad H_{1z} = 0 \tag{3.3}$$

($V_{1x}, H_{1y}, V_{2x}, H_{2y}$ и т.д. - предельные значения соответствующих величин при $x \to -\infty, +\infty$, соответственно). Учитывая (3.1)-(3.3) и одномерность движения из основных уравнений (2.6),(2.7) легко получить

$$V_x = u_1 - \frac{H_y^2 + H_z^2 - H_1^2}{8\pi m j} \tag{3.4}$$

$$V_y = \frac{H_0}{4\pi m j}\,(H_y - H_1) \tag{3.5}$$

$$V_z = \frac{H_0 H_z}{4\pi m j} \tag{3.6}$$

$$V_y H_0 - V_x H_y + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H_y' + \frac{mc}{e} V_x V_z' = -u_1 H_1 \tag{3.7}$$

$$V_z H_0 - V_x H_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H_z' - \frac{mc}{e} V_x V_y' = 0 \tag{3.8}$$

Из этих уравнений следуют, прежде всего, предельные соотношения, связывающие величины с обеих сторон фронта ударной волны, т.е. соотношения для скачков на "разрыве"; из (3.5),(3.7) и (3.6)-(3.8) вытекает ($H_2 = H_{2y}$, $u_2 = V_{2x}$):

$$\frac{H_0^2}{4\pi m j}(H_2 - H_1) = u_2 H_2 - u_1 H_1 \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{H_0^2}{4\pi m j} - u_2\right) H_{2z} = 0 \tag{3.10}$$

Из (3.9),(3.10) следует, что H_{2z} может быть отличным от нуля только при условии $u_2 = u_1 = H_0^2/4\pi m j$. Это соответствует скачку вращательного типа, который мы здесь рассматривать не будем. Поэтому можно считать, что

$$H_{2z} = 0\,, \quad V_{2z} = 0 \tag{3.11}$$

Последнее равенство следует из (3.6).

Из (3.4),(3.5),(3.7),(3.8) легко получить

$$u_1 = \frac{H_0^2}{4\pi m j} + \frac{H_2^2 + H_1 H_2}{8\pi m j} \tag{3.12}$$

$$u_2 = \frac{H_0^2}{4\pi m j} + \frac{H_1 H_2 + H_1^2}{8\pi m j} \tag{3.13}$$

$$V_{2y} = \frac{H_0 (H_2 - H_1)}{4\pi m j} \tag{3.14}$$

Заметим, что соотношения между предельными величинами на разрыве (3.11)-(3.14) совпадают с соответствующими уравнениями магнитной гидродинамики при /8/. Таким образом, учет ионной дисперсии не приводит к изменениям условий на разрыве. Это связано с тем, что дополнительные члены, описывающие дисперсию (члены с mc/e в (3.7),(3.8)) содержат производные и обращаются в нуль при $x \to \pm\infty$. Однако, структура разрыва определяется именно этими членами.

Заметим также, что условия эволюционности /9/ приводят к неравенству

$$u_1 > u_2 \tag{3.15}$$

Из (3.12),(3.13) тогда вытекает, что поперечная составляющая магнитного поля после прохождения волны усиливается

$$H_2 > H_1 \tag{3.16}$$

Подставляя (3.4)-(3.6) в (3.7),(3.8), получим

$$\frac{H_y^2 + H_z^2 - H_1^2}{8\pi m j} H_y - u_0 (H_y - H_1) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H_y' + \frac{H_0 c V_x}{4\pi n e u_1} H_z' = 0\,, \tag{3.17}$$

$$\left(\frac{H_y^2 + H_z^2 - H_1^2}{8\pi m j} - u_0\right) H_z + \frac{c^2}{4\pi\sigma} H_z' - \frac{H_0 c V_x}{4\pi n e u_1} H_y' = 0\,, \tag{3.18}$$

где обозначено

$$u_0 = u_1 - \frac{H_0^2}{4\pi m j} = \frac{(H_1 + H_2) H_2}{8\pi m j} \tag{3.19}$$

Как и в /1/ мы ограничимся исследованием слабых ударных волн, т.е. будем считать, что

$$u_1 - u_2 \ll u_1 \tag{3.20}$$

Только в этом случае можно пренебречь перепадом газокинетического давления по сравнению с магнитным, а также считать, что электропроводность σ (2.9) приблизительно постоянна внутри фронта волны. Благодаря (3.20) мы можем заменить в последних членах (3.17),(3.18) V_x на u_1. В (3.18) можно также пренебречь членом $\frac{c^2}{4\pi\sigma} H_z'$ по сравнению с последним, поскольку частота столкновений удовлетворяет условию

$$\nu_{ei} \ll \omega_{He} = \frac{eH}{m_e c} \tag{3.21}$$

Учитывая граничные условия для H_z ($H_z \to 0$ при $x \to \pm\infty$), легко убедиться, что можно опустить H_z^2 в первых членах (3.17) и (3.18). После этих пренебрежений система (3.17),(3.18) сводится к следующему уравнению:

$$A^2 \frac{d}{dx}\left[\left(1 - \frac{H^2 - H_1^2}{8\pi m j u_0}\right)\frac{dH}{dx}\right] - B\frac{dH}{dx} - \frac{H^2 - H_1^2}{8\pi m j u_0} H + H - H_1 = 0 \tag{3.22}$$

$$A^2=\left(\frac{eH_0}{m_e c}\right)^2\frac{c^4}{\omega_{0i}^4 u_0^2}\quad ; \qquad B=\frac{c^2}{4\pi\sigma u_0} \tag{3.23}$$

Здесь и в дальнейшем обозначено $H_y=H$

Приступим к решению уравнения (3.22). Введем обозначения

$$1+\frac{H_1^2}{8\pi m j u_0}=a^2$$

$$H_2^2+H_1H_2+H_1^2=8\pi m j u_0 a=\eta^2. \tag{3.24}$$

Тогда (3.22) примет вид:

$$A^2a^2\frac{d}{dx}\left[\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)^{-1}\frac{dH}{dx}\right]-B\frac{dH}{dx}+a^2H\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)+H_1=0 \tag{3.25}$$

Для решения этого уравнения удобно перейти к новой независимой переменной $x=x(u)$, так чтобы

$$\frac{du}{dx}=1-\frac{H^2}{\eta^2} \tag{3.26}$$

Откуда следует

$$\frac{dH}{du}=\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)^{-1}\frac{dH}{dx} \tag{3.27}$$

Подстановка (3.26),(3.27) в (3.25) приводит это уравнение к виду

$$\frac{d^2H}{du^2}-\beta\frac{dH}{du}+\alpha H-\frac{H_1}{A^2a^2\left(1-\frac{H^2}{\eta^2}\right)}=0 \tag{3.28}$$

$$\beta=\frac{B}{A^2a^2}\ ,\qquad \alpha=1/A^2 \tag{3.29}$$

Для решения этого уравнения можно применить наглядную аналогию, предложенную ранее в /1/, а именно, это есть уравнение движения частицы (роль координаты играет H, а времени - u) в эффективной потенциальной яме вида

$$V(H)=\frac{1}{(2A)^2}\left[H^2-H_1^2-\frac{\eta H_1}{a^2}\ln\frac{\left(1+\frac{H}{\eta}\right)\left(1-\frac{H_1}{\eta}\right)}{\left(1-\frac{H}{\eta}\right)\left(1+\frac{H_1}{\eta}\right)}\right. \tag{3.30}$$

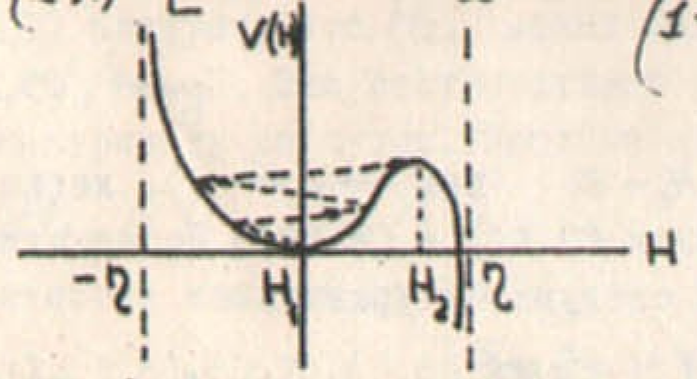


Рис. 1.

с отрицательным "трением" $-\beta$. График этого потенциала представлен на рис.I. Минимум имеет место в точке H_1, а максимум в точке H_2. Благодаря отрицательному трению "равновесие" в точке H_1 неустойчиво и "движение", начинающееся в точке H_1, заканчивается в точке H_2. Характер "движения" может носить периодический или апериодический характер в зависимости от соотношения между коэффициентом "трения" β и длиной дисперсии A. В достаточно плотной плазме, когда число столкновений и, следовательно, коэффициент β велик, т.е. при условии

$$\beta>\frac{2a}{A}\left(1-\frac{3H_1^2}{\eta^2}\right)^{1/2} \tag{3.31}$$

рост магнитного поля внутри фронта имеет апериодический характер и при

$$\beta\gg\frac{2a}{A}\left(1-\frac{3H_1^2}{\eta^2}\right)^{1/2}\qquad \left(\nu_{ei}\gg\left(\frac{eH_0}{m_e c}\right)\left(1-\frac{3H_1^2}{\eta^2}\right)^{1/2}\right) \tag{3.32}$$

совпадает с известным гидродинамическим профилем, определяемым магнитной вязкостью. Соответственно этому положение "равновесия" $H=H_1$ на фазовой плоскости является особой точкой типа "узел" (рис.2а). В разреженной плазме с достаточно малым числом столкновений (условие обратное (3.32)):

$$\nu_{ei}\ll \tag{3.33}$$

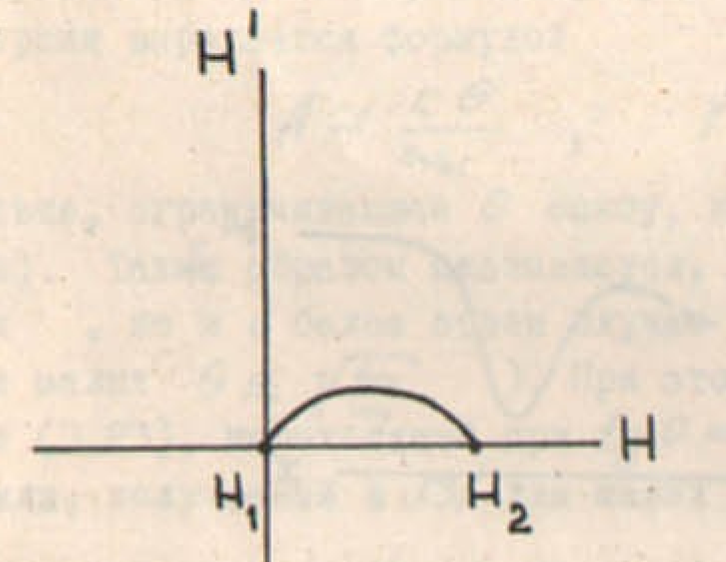


Рис. 2а

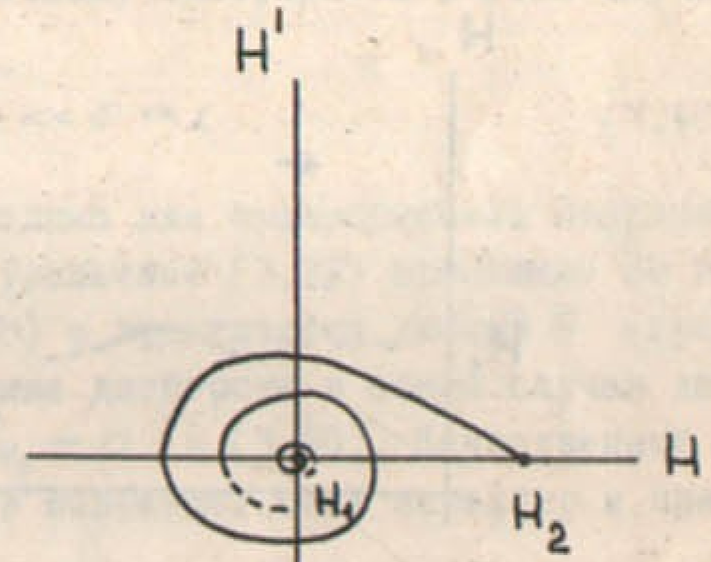


Рис. 2б.

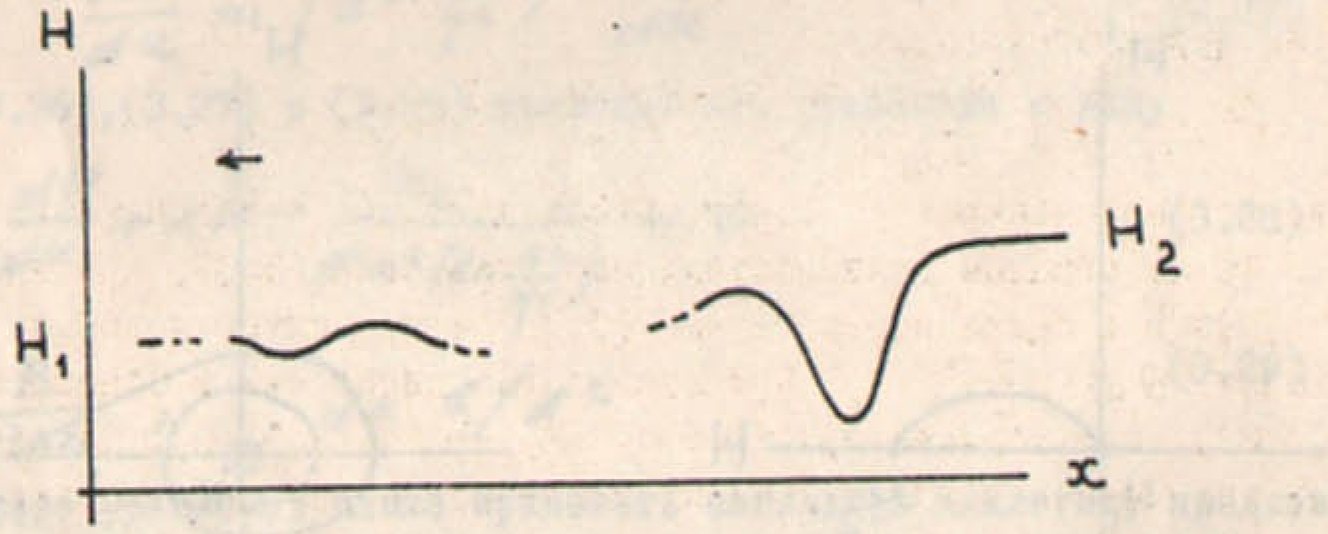
особая точка $H = H_2$ становится "фокусом" (рис.2б).

Характер особых точек на фазовой плоскости и общий ход фазовых кривых, разумеется, не меняется при переходе от переменной u к переменной x, ибо

$$H'_x = H'_u\,(1 - H^2/\eta^2)$$

причем $1 - H^2/\eta^2 > 0$. Поэтому все сказанное и рисунки (2а,б) можно также считать относящимся к фазовой плоскости (H, H'_x).

Отсюда вытекает следующий ход профиля фронта ударной волны (рис.3). Профиль начинается с малых осцилляций, переходящих в серию уединенных волн "разрежения". Последние постепенно переводят магнитное поле к значению $H \to H_2$ x). Магнитное поле внутри фронта достигает значений меньших, чем в невозмущенной плазме. Общая картина профиля ударной волны является перевернутой по отношению к профилю, полученному в /1/ для случая ударной волны, распространяющейся поперек магнитного поля, где фронт начинается с уединенных волн "сжатия", переходящих в малые осцилляции. Причиной этого обращения является противоположный характер закона дисперсии, определящей структуру фронта. Если для случая волны, распространяющейся перпендикулярно магнитному полю, дисперсия определяется инерцией электронов и ω/k убывает с ростом k, то в нашем случае ω/k растет с ростом k (см./2/,стр.93 и /3/).



Рассмотрим более детально осцилляции в передней части профиля фронта. Полагая в (3.25) $H = H_1 + h$, где $h \ll \eta \sim H_2$ (подчеркнем, что мы не требуем малости h по сравнению с H_1, так как H_1 может быть весьма малым по сравнению с H_2), получим:

$$A^2 a^2 h'' - B h' + a^2\left(1 - \frac{3H_1^2}{\eta^2}\right) h = 0 \qquad (3.34)$$

x) Характерный размер последних уединенных волн порядка длины дисперсии A.

Это уравнение имеет решение

$$h \sim e^{\gamma x} \cos kx \qquad (3.35)$$

$$\gamma = \frac{\beta}{2} = \frac{B}{2A^2a^2} \qquad (3.36)$$

$$k = A^{-1}\sqrt{1 - \frac{3H_1^2}{\eta^2}} \qquad (3.37)$$

Эти формулы определяют волновое число и декремент затухания осцилляций в передней части фронта ударной волны.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$H_2 - H_1 \ll H_2 \qquad (3.38)$$

(продольная же составляющая H_0 может быть любой). Используя (3.38),(3.24) легко привести основное уравнение (3.25) к виду:

$$A^2 H'' - \frac{H^2 - H_1^2}{8\pi m j u_0} H + H - H_1 - B\frac{dH}{dx} = 0 \qquad (3.39)$$

Это уравнение было получено ранее в /3/ для случая, когда ударная волна распространяется почти перпендикулярно магнитному полю,причем в этом случае длина дисперсии выражается формулой

$$A \simeq \frac{c\theta}{\omega_{0i}}, \qquad \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ll \theta \ll 1 \qquad (3.40)$$

(Условие, ограничивающее θ снизу, необходимо для пренебрежения инерцией электронов). Таким образом оказывается, что уравнение (3.39) применимо не только при малых , но и в более общем случае (3.38) с практически любыми θ (кроме исчезающе малых $\theta \lesssim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$). При этом длина дисперсии в общем случае дается формулой (3.23), переходящей при $tg\,\theta = H_0/H_1 \to 0$ в (3.40). Качественный же ход профиля, полученный в /3/ для малых углов сохраняет свой характер и при больших θ.

§ 4. Кинетическое уравнение для волн.

Система уравнений (2.6)-(2.8) для не слишком больших отклонений величин от равновесных может быть записана в виде:

$$i\frac{\partial \vec\varphi}{\partial t} + \hat H_0 \vec\varphi + \hat{\vec H}_1\{\vec\varphi, \vec\varphi\} = 0 \qquad (4.1)$$

где $\vec\varphi$ - вектор состояния, представляемый в виде столбца из компонент скорости $\vec v$, возмущения магнитного поля $\vec h$ и плотности n;

$\hat H_0$ - некоторый линейный оператор с действительными собственными значениями;

$\hat{\vec H}_1$ - билинейный векторный оператор.

$\hat H_0$ можно представить в виде матрицы, элементами которой являются дифференциальные операторы , $\hat{\vec H}_1$ в виде вектора-столбца из своих компонент.

Для волн малой амплитуды при пренебрежении нелинейным членом получаем уравнение:

$$i\frac{\partial \vec\varphi}{\partial t} + \hat H_0 \vec\varphi = 0 \qquad (4.2)$$

Это уравнение имеет собственные решения вида $\varphi_k(\vec r,t)=\varphi_k e^{-i(\omega_k t-\vec k\vec r)}$, где частота ω_k - действительна в силу эрмитовости оператора $\hat H_0$. Вектор φ можно разложить по собственным векторам оператора $\hat H_0$

$$\varphi=\sum_k c_k^{(0)}\varphi_k e^{-i(\omega_k t-\vec k\vec r)}+c_{\underline{k}}^{(0)}\varphi_{\underline{k}}e^{i(\omega_k t-\vec k\vec r)}$$

$$c_k^{(0)}=c_{\underline{k}}^{(0)*},\quad \varphi_k=\varphi_{\underline{k}}^{*} \tag{4.3}$$

где $c_k^{(0)}$, $c_{\underline{k}}^{(0)}$ - комплексные амплитуды гармоник с волновым вектором $\vec k$ и частотами ω_k ; $-\omega_k$, соответственно, при отсутствии взаимодействия между отдельными волнами.

При получении кинетического уравнения основную роль играет следующий постулат: фазы амплитуд различных волн $\alpha_k=\arg c_k$ распределены совершенно хаотически. Это утверждение нужно понимать следующим образом. Мы предполагаем, что волны (4.3) появляются в результате развития какой-либо неустойчивости (в дальнейшем рассматривается конкретный случай так называемой распадной неустойчивости подробно исследованной ранее в /4/). В течение некоторого времени после своего возникновения из "источника неустойчивости" фазы отдельных c_k разумеется коррелированы. Нелинейное взаимодействие волн, описываемое вторым членом в (IУ.I) приводит, однако, к ослаблению корреляции. Это ослабление корреляции происходит тем быстрее, чем больше гармоник появилось в результате развития неустойчивости x).

Постулат хаотичности фаз означает, что корреляция между фазами c_k полностью исчезает за время малое по сравнению с временем изменения $|c_k|^2$ (т.е. энергий отдельных волн) благодаря нелинейному взаимодействию между гармониками. Благодаря этому, при выводе кинетического уравнения мы можем применить усреднение по фазам (в смысле усреднения по ансамблю совокупностей фаз различных c_k), т.е.

$$\overline{c_k^{(0)}c_{k'}^{(0)}}=|c_k^{(0)}|^2\delta_{k'\underline{k}},\quad \delta_{k'k}=\begin{cases}1 & k'=k\\ 0 & k'\neq k\end{cases} \tag{4.4}$$

Мы разделяем плазму на медленно меняющийся фон и быстроосциллирующую часть, представляющую собой распространяющиеся волны в плазме. Энергия этих волн в плазме в приближении хаотических фаз есть

$$\mathcal{E}=\sum_k E_k,\qquad E_k=|c_k|^2\left\{\rho_0\frac{|\vec v_k|^2}{2}+\frac{|\vec h_k|^2}{8\pi}\right\} \tag{4.5}$$

Нормируя вектор состояния φ_k согласно условию

$$\rho_0\frac{|\vec v_k|^2}{2}+\frac{|\vec h_k|^2}{8\pi}=\omega_k \tag{4.6}$$

мы можем интерпретировать квадрат модуля амплитуды волны $n_k=|c_k|^2$ как число квазичастиц с энергией ω_k. Ясно, что сохраняется энергия и импульс фона и квазичастиц вместе взятых. Кроме того, как можно показать в квазиклассическом приближении, когда фон меняется медленно, сохраняется

x) По интенсивности этих гармоник, разумеется, должны быть достаточно малы для того, чтобы можно было применять теорию возмущений.

адиабатический инвариант $n_k=E_k/\omega_k$ (энергия осциллятора, деленная на частоту) для каждой квазичастицы /5/, т.е. полная производная

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}t}\left(\frac{E_k}{\omega_k}\right)=\frac{\mathcal{D}n_k}{\mathcal{D}t}=0 \tag{4.7}$$

Изменение числа квазичастиц n_k в данном состоянии из-за столкновений их между собой описывается нелинейным членом $H_1\{\varphi,\varphi\}$ в уравнении (4.I). Если этот нелинейный член мал, то можно воспользоваться теорией возмущений. В разложении (4.3) теперь следует добавить к вектору состояния φ_k ортогональную составляющую φ'_k, возникающую из-за нелинейного взаимодействия.

Как будет видно из дальнейшего (см.(4.9)) φ'_k является малой первого порядка, если амплитуда c_k - малая первого порядка. Таким образом, решение, учитывающее взаимодействие между гармониками ищется в виде:

$$\varphi=\sum_k c_k(t)\,(\varphi_k+\varphi'_k)\,e^{-i(\omega_k t-\vec k\vec r)}+\text{к.с.} \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в уравнение (4.I), получаем с точностью до малых второго порядка

$$-[\omega_k+H_0(\vec k)]c_{\vec k}\varphi'_k=i\frac{\partial c_{\vec k}}{\partial t}\varphi_k+\sum_{\vec k'+\vec k''=\vec k}c_{\vec k'}c_{\vec k''}H_1(\vec k)\{\varphi_{k'}\varphi_{k''}\}e^{-i(\omega_{k'}+\omega_{k''}-\omega_k)t} \tag{4.9}$$

Условием разрешимости системы (4.9) для определения φ'_k является ортогональность правой части к решению сопряженного уравнения

$$\tilde\varphi_k\,(\omega_k+H_0(k))=0 \tag{4.10}$$

где $\tilde\varphi_k$ - вектор-строка.

Умножая (4.9) скалярно на $\tilde\varphi$ слева, получаем

$$\left(\tilde\varphi_k,\left\{i\frac{\partial c_k}{\partial t}\varphi_k+\sum_{\vec k'+\vec k''=\vec k}c_{\vec k'}c_{\vec k''}H_1\{\varphi_{k'}\varphi_{k''}\}e^{-i(\omega_{k'}+\omega_{k''}-\omega_k)t}\right\}\right)=0$$

Переписывая это в виде

$$\frac{\partial c_{\vec k}}{\partial t}=-i\sum_{\vec k'+\vec k''=\vec k}V_{\vec k\vec k'\vec k''}c_{\vec k'}c_{\vec k''}e^{-i(\omega_{k'}+\omega_{k''}-\omega_k)t} \tag{4.11}$$

где

$$V_{\vec k\vec k'\vec k''}=\frac{(\tilde\varphi_{\vec k},H_1\{\varphi_{\vec k'},\varphi_{\vec k''}\})}{(\tilde\varphi_{\vec k},\varphi_{\vec k})}$$

получаем динамическое уравнение (4.II) в $\vec k$ -представлении.

Вид матричного элемента $V_{\vec k\vec k'\vec k''}$ и решение $\tilde\varphi_k$ однородного сопряженного к (4.9) уравнения для конкретного случая системы (2.6)-(2.8) даны в приложении I.

Для определения $c_k(t)$ в момент времени t воспользуемся теорией возмущений. Из (4.II) получим

$$c_{\vec k}(t)=c_{\vec k}^{(0)}+c_{\vec k}^{(1)}+c_{\vec k}^{(2)}+\dots$$

$$C_k^{(1)} = -i\sum_{k'} C_{k'}^{(0)} C_{k''}^{(0)} \int_0^t V_{kk'k''}(t')\,dt',$$

$$C_k^{(2)} = -\sum_{k',k''}\sum_{q',q''} C_{k'}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' V_{kk'k''}(t') V_{k''q'q''}(t'') - \tag{4.12}$$

$$- \sum_{k',k''}\sum_{q'}\sum_{q''} C_{k''}^{(0)} C_{q'}^{(0)} C_{q''}^{(0)} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' V_{kk'k''}(t') V_{k'q'q''}(t'')$$

где
$$V_{kk'k''}(t) = V_{kk'k''}\, e^{-i(\omega_{k'}+\omega_{k''}-\omega_k)t}, \quad V_{kk'k''} \neq 0 \text{ при } \vec{k} = \vec{k}' + \vec{k}''.$$

$C_k^{(0)}$ - от времени не зависит и отвечает решению при отсутствии взаимодействия между гармониками.

Изменение числа квазичастиц $|C_k(t)|^2 - |C_k^{(0)}|^2$, усредненное по фазам амплитуд $C_k^{(0)}$ с помощью (4.4) есть с точностью до членов второго порядка:

$$|C_k(t)|^2 - |C_k^{(0)}|^2 = |C_k^{(1)}|^2 + \left(C_k^{(0)} C_k^{(1)*} + C_k^{(0)*} C_k^{(1)}\right) \tag{4.13}$$

Используя свойства матричного элемента

$$V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} = V_{\vec{k}\vec{k}''\vec{k}'}, \quad V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} = V_{\vec{k}''\vec{k}'\vec{k}}$$

$$V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} = -V^*_{\vec{k}''\vec{k}'\vec{k}}, \quad V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} = -V^*_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}, \text{ при } \omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}'}, \omega_{\vec{k}''} > 0 \tag{4.14}$$

$$\left| \int_0^t V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}(t')\,dt' \right|^2 = t \cdot 2\pi |V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}|^2 \delta(\omega_{\vec{k}'} + \omega_{\vec{k}''} - \omega_{\vec{k}})$$

$$\text{при } t \to \infty$$

получаем изменение числа квазичастиц в единицу времени из-за столкновений.

$$\left(\frac{\partial n_k}{\partial t}\right)_s = 4\pi \sum_{\vec{k}'\vec{k}''} |V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}|^2 \Big\{ (n_{k'} n_{k''} - n_k n_{k'} - n_k n_{k''}) \delta(\omega_{k'} + \omega_{k''} - \omega_k) \delta(\vec{k}' + \vec{k}'' - \vec{k})$$

$$+ 2(n_{k'} n_{k''} + n_k n_{k''} - n_k n_{k'}) \delta(\omega_{k''} - \omega_{k'} - \omega_k) \delta(\vec{k}'' - \vec{k}' - \vec{k}) \Big\} \tag{4.15}$$

Свойства (4.14) можно проверить с помощью выражения для $V_{kk'k''}$, приведенного в приложении I. В уравнении (4.15) суммирование идет только по тем $\vec{k}'\vec{k}''$, где $\omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}'}, \omega_{\vec{k}''} > 0$. Первый член в (4.15) описывает рождение квазичастицы с энергией ω_k в результате слияния квазичастиц с энергиями $\omega_{\vec{k}'}, \omega_{\vec{k}''}$ и обратный процесс распада. Второй член в (4.15) описывает распад квазичастицы с энергией $\omega_{\vec{k}''}$ на две квазичастицы с энергиями $\omega_{\vec{k}}, \omega_{\vec{k}'}$ и обратный процесс слияния.

Уравнение (4.15) совпадает по форме с кинетическим уравнением, предложенным в /5/, однако явный вид $V_{kk'k''}$ в /5/ отсутствует.

Любопытно отметить, что $(\partial n_k / \partial t)_{ст}$ обращается в нуль при

$$n_k = \frac{T}{\omega_k} \tag{4.16}$$

где T - эффективная "температура" газа квазичастиц (в единицах энергии), (4.16) является не чем иным, как распределением Релея-Джинса.

§ 5. Критерий распадной неустойчивости.

В рамках формализма, развитого в предыдущем параграфе, можно очень просто сформулировать критерий распадной неустойчивости, рассматривавшейся ранее в /4/. А именно, пусть по плазме распространяется волна с частотой $\omega_{\vec{k}}$ и волновым вектором $\vec{k}$. Тогда возмущения в виде двух волн, частоты $\omega_{\vec{k}'}, \omega_{\vec{k}''} > 0$ и волновые вектора $\vec{k}', \vec{k}''$ которых удовлетворяют условиям

$$\vec{k}' = \vec{k} - \vec{k}'', \quad \omega_{\vec{k}'} = \omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}''} \tag{5.1}$$

нарастают во времени. Действительно из (4.11) и (4.14) имеем систему двух уравнений для амплитуд $C_{\vec{k}'}$ и $C_{\vec{k}''}$

$$\frac{\partial C_{\vec{k}'}}{\partial t} = -i V_{\vec{k}'\vec{k}\vec{k}''} C_{\vec{k}}^{(0)} C_{\vec{k}''};$$

$$\frac{\partial C_{\vec{k}''}}{\partial t} = -i V_{\vec{k}''\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}}^{(0)} C_{\vec{k}'} = i V^*_{\vec{k}'\vec{k}\vec{k}''} C_{\vec{k}}^{(0)} C_{\vec{k}'}$$

Т.к. амплитуды возмущений $C_{\vec{k}'}$ и $C_{\vec{k}''}$ малы, то амплитуду волны $C_k^{(0)}$ можно считать постоянной $\frac{\partial C_k}{\partial t} \sim C_{k'} C_{k''} \simeq 0$. Решение системы ищем в виде $\sim \exp \nu t$ и получаем инкремент неустойчивости

$$\nu^2 = |V_{\vec{k}'\vec{k}\vec{k}''}|^2 |C_{\vec{k}}^{(0)}|^2 > 0 \tag{5.2}$$

Если возмущения таковы, что $\omega_{\vec{k}'} > \omega_{\vec{k}} > 0$ и выполняются распадные условия

$$\vec{k}' = \vec{k} + \vec{k}'', \quad \omega_{\vec{k}'} = \omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}''}, \tag{5.3}$$

то имеем систему уравнений для определения амплитуд малых возмущений

$$\frac{\partial C_{\vec{k}'}}{\partial t} = -i V_{\vec{k}'\vec{k}\vec{k}''} C_{\vec{k}}^{(0)} C_{\vec{k}''},$$

$$\frac{\partial C_{\vec{k}''}}{\partial t} = -i V_{\vec{k}''\vec{k}\vec{k}'} C_{\vec{k}}^{(0)} C_{\vec{k}'} = -i V^*_{\vec{k}'\vec{k}\vec{k}''} C_{\vec{k}}^{(0)} C_{\vec{k}'}$$

Для решения вида $\exp \nu t$ получаем

$$\nu^2 = -|V_{\vec{k}'\vec{k}\vec{k}''}|^2 |C_{\vec{k}}^{(0)}|^2 < 0 \tag{5.4}$$

т.е. волна устойчива.

Итак, при "распадной" неустойчивости могут появляться лишь волны с частотой меньшей, чем исходная.

§ 6. Влияние турбулентности на структуру фронта ударной волны.

В этом параграфе мы разберем вопрос о том, насколько велико влияние турбулентных пульсаций, возникающих из-за распадной неустойчивости, на ламинарную осцилляторную структуру ударных волн. Прежде всего запишем из (4.7), (4.15) и (5.2) полное кинетическое уравнение для волн:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial n_k}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial n_k}{\partial k_x}\frac{dk_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\partial n_k}{\partial t}\right)_s + 2\nu n_k \tag{6.1}$$

Здесь изменение числа волн в об"еме мы приравняли к изменению их числа при столкновениях и приращению из-за распадной неустойчивости. Производную определяем из условия, что частота в системе координат движущейся с ударной волной $\omega_{\vec{k}} + k_x u$ есть постоянная, а $\frac{dx}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial k_x} + u$ - групповая скорость волн в этой же системе координат. (u - скорость потока плазмы относительно ударной волны). В работе /5/ использовано уравнение (6.I), но без источника волн, для построения структуры ударной волны в турбулентном режиме. В качестве источника энергии турбулентных пульсаций авторы пытаются использовать изменение частоты в системе покоя плазмы (а следовательно и пропорциональной ей энергии) при прохождении их через поле потока с переменной скоростью. На самом деле, рассматривая "квазичастицы" движущиеся вместе с ударной волной, необходимо оперировать с энергией в системе координат, связанной с ударной волной. Но эта энергия, как можно показать из уравнения

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \frac{\partial n_k}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial k_x} + u\right) - k_x \frac{du}{dx}\frac{\partial n_k}{\partial k_x} = \left(\frac{\partial n_k}{\partial t}\right)_s \qquad (6.\text{Ia})$$

использованного в /5/, естественно сохраняется, т.к. в медленно меняющемся поле потока сохраняется число квазичастиц n_k и их "энергия" $\omega_k + k_x u$, а в столкновениях выполняется закон сохранения энергии $\sum n_\omega (\omega + k_x u)$. Итак, источника энергии волн в такой схеме нет и возникает вопрос о его получении. Таким источником может служить распадная неустойчивость осцилляторной структуры ударной волны

В качестве примера рассмотрим распространение слабой ударной волны поперек сильного магнитного поля $\frac{H^2}{8\pi} \gg p$. В этом случае ее осцилляторную структуру можно представить себе как волну с частотой ω_0 и волновым вектором k_0 /I/

$$\omega_0 = k_0 C_A \mathcal{M}, \qquad k_0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\mathcal{M}^{-2})}\sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\,\frac{\omega_H}{C_A}, \qquad (6.2)$$

$\mathcal{M}$ - число Маха.

Если $\mathcal{M} - 1 \gg \frac{m_e}{m_i}$, то частота волны ω_0 значительно больше ионной ларморовской частоты ω_H. В этом случае ударная волна неустойчива по отношению к рождению волн. Распадные условия (5.I) записываются в виде (при малом k_{1y}):

$$k_0 C_A\,[1 + (\mathcal{M}-1)] = k_1 C_A\left(1 + \frac{k_{1y} C_A^2}{\omega_H^2}\right) + k_2 C_A$$

$$k_0 = k_{1x} + k_{2x}, \quad k_{1y} = -k_{2y}, \quad k_{1y} \ll \frac{\omega_H}{C_A} \qquad (6.3)$$

Эти условия можно выполнить только для $k_y < \sqrt{\mathcal{M}-1}\;\omega_H / C_A$.

Рождающиеся при распаде низкочастотные волны (с частотами $\sim k_{2y} C_A \sim \sqrt{\mathcal{M}-1}\,\omega_H$) распространяются под большими углами к направлению распространения ударной волны и быстро сносятся потоком. Волны же с частотами $\omega \gg \omega_H$ распространяются почти в одном направлении с ударной волной (их угловой разброс порядка $\frac{k_{2y}}{k_0} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}$) и поэтому почти не сносятся. При столкновениях этих волн друг с другом рождаются низкочастотные волны и благодаря сносу последних происходит диссипация энергии этой группы волн. Из формулы (П.4) приложения I определяем квадрат матричного элемента этого процесса

$$\left|V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}\right|^2 = \frac{\omega\omega'\omega''}{\rho V_A^2}\left(1 + \frac{k_x''}{2k''}\right)^2 \qquad (6.4)$$

где использовано, что $\omega'' \sim k_y C_A \sim \sqrt{\mathcal{M}-1}\,\omega_H \ll \omega_H$. Отсюда мы можем оценить изменение числа этих волн из-за столкновений:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_s \simeq 2\pi\,\frac{\sum_k \overline{\omega_k^2}\,\omega'' N_k}{\frac{1}{2}\rho C_A^2}\,N \simeq \frac{N}{\tau} \qquad (6.5)$$

где $\tau \simeq \frac{2}{\pi\bar{\beta}_N\omega''}$ - время столкновения волн.

N_k - число высокочастотных волн с частотой $\omega_k \simeq \omega_0$.

$\bar{\beta} = \frac{1}{4}\,\frac{\sum_k N_k \omega_k}{H_0^2/8\pi}$ - отношение энергии волн к энергии магнитного поля.

Т.к. число рождающихся в единицу времени волн $\sim \nu N \sim \left(\frac{n\omega_0}{H^2/8\pi}\right)^{1/2}\omega_0 N \sim$ не может быть скомпенсировано уходом их из-за столкновений $\sim (\mathcal{M}-1)\omega_0 N$, то разумно предположить, что вся энергия ламинарной ударной волны перекачивается в энергию волн в группе, т.е.

$$\bar{\beta} \simeq (\mathcal{M}-1)^2 \qquad (6.6)$$

Приравнивая изменение числа волн N в об"еме к уходу их (6.5) из-за столкновений, получаем оценку для распределения волн в пространстве (пользуемся системой координат, связанной с пакетом)

$$\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial k_x} + u\right)\frac{\partial N}{\partial x} \simeq \left(\frac{dN}{dt}\right)_s$$

или

$$(\mathcal{M}-1)\,C_A\,\frac{\partial N}{\partial x} \simeq \frac{\pi}{2}\bar{\beta}\,\omega'' N$$

т.е. изменение плотности можно аппроксимировать экспонентой

$$N \sim e^{x/L}, \text{ где } L \simeq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{C_A}{(\mathcal{M}-1)^{3/2}\,\omega_H} \qquad (6.7)$$

На самом деле само $\bar{\beta} \sim N$ и мы имеем неэкспоненциальный характер распределения волн.

Если ударная волна распространяется под углом к магнитному полю H_0 бо́льшим, чем $\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$, то становится существенной инерция ионов. В этом случае частота ее осцилляторной структуры $\omega_0 \lesssim \omega_H$ и, как можно показать с помощью (5.2) и (П.4), она неустойчива и распадается на волны, бегущие под самыми различными углами к направлению распространения ударной волны. Поэтому бо́льшая часть энергии, перекаченной в результате распада в турбулентные пульсации, сносится потоком.

Ввиду малости энергии турбулентных пульсаций $\bar{\beta}$ время их столкновений очень велико и поэтому основным процессом, уменьшающим число пульсаций, является их снос. Приравнивая прирост пульсаций из-за распада и их снос, получаем распределение пульсаций в пространстве

$$2\nu n_k \simeq \frac{\partial n_k}{\partial x} C_A$$

Из формул (П.4) и (5.2) имеем $\nu = \frac{1}{8}(\mathcal{M}-1)\bar{\omega}$ (для распространения ударной волны почти поперек поля $\bar{\omega} \sim \sqrt{\mathcal{M}-1}\,\omega_H$ см.(3.37)). Отсюда

$$\frac{(\mathcal{M}-1)^{3/2}\omega_H}{4}\,n_k = \frac{\partial n_k}{\partial x} C_A, \quad n_k \sim e^{x/L} \qquad (6.8)$$

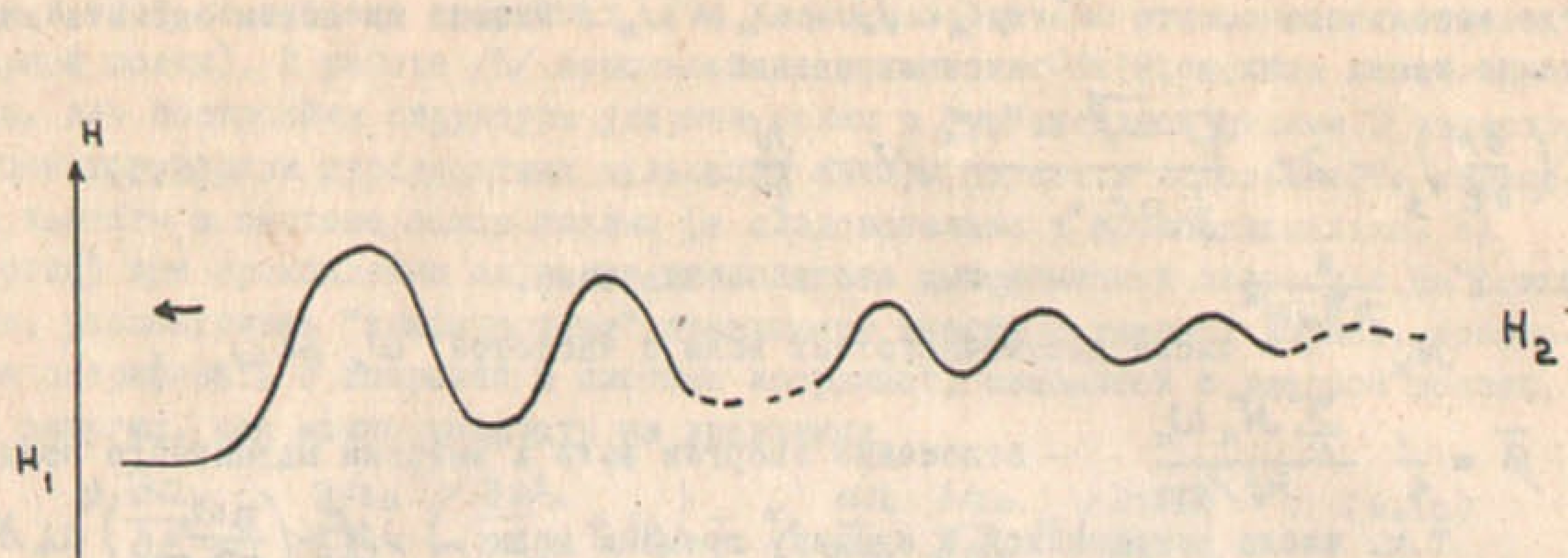


Рис. 4а

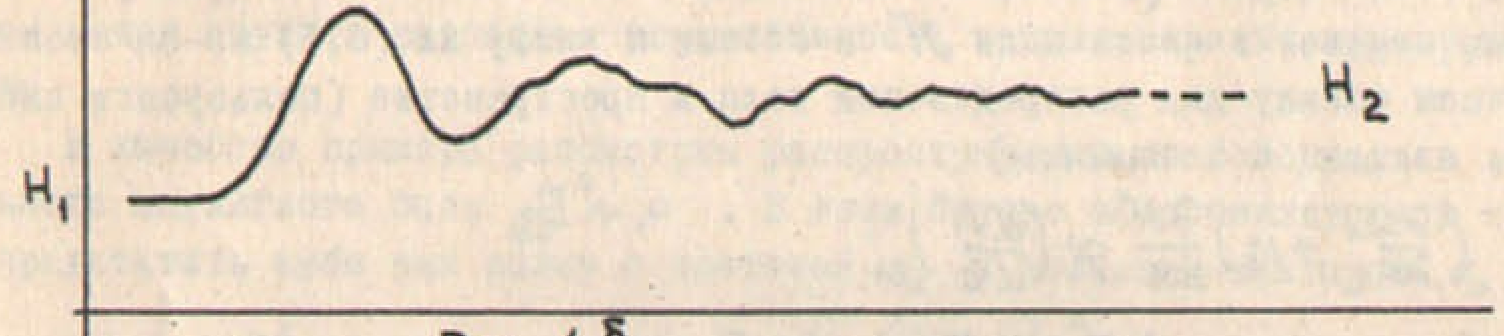


Рис. 4б

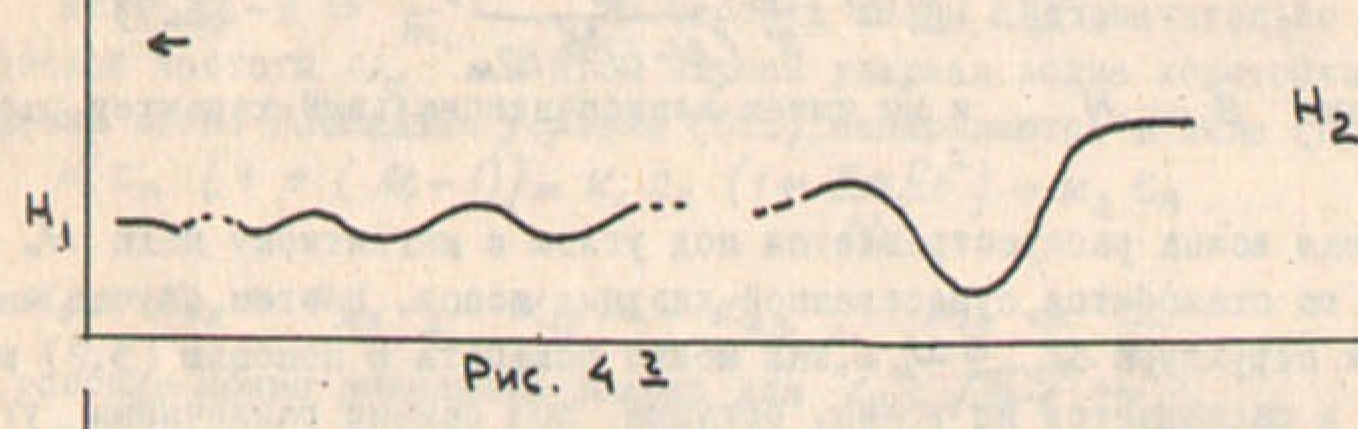


Рис. 4г

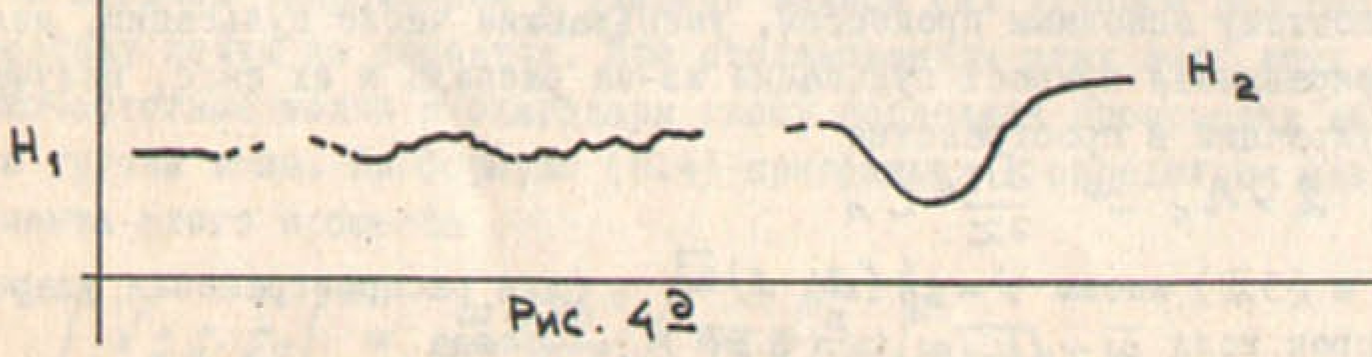


Рис. 4д

Качественный профиль изменения магнитного поля в ламинарном и турбулентном случаях (4а,б в волне, распространяющейся парпендикулярно $\vec{H}$); (4г,д в волне под углом к $\vec{H}$).

где
$$L = \frac{4\,C_A}{(\mathcal{M}-1)^{3/2}\,\omega_H}$$

Итак, при учете распадной неустойчивости ударной волны длина осциллирующей структуры не успевает дорасти до своего значения c_A/ν_{ei} (ν_{ei} - частота электрон-ионных столкновений) в "бесстолкновительной" плазме, т.к. по мере появления осцилляций в ударной волне начинает проявляться распад. Ширина ударной волны оказывается малочувствительной к направлению распространения волны и определяется характерными размерами L , приведенными в (6.7) и (6.8). Частоты же турбулентных пульсаций по порядку величины совпадают с частотой осцилляций ламинарной структуры и существенно зависит от угла. Для наглядности приведем рисунки профиля ударной волны в обоих этих случаях в бесстолкновительной плазме и при учете распада(Рис. 4)

Авторы выражают искреннюю благодарность Р.З.Сагдееву за стимулирующие дискуссии и ценные советы.

Приложение I.

Система (4.I) для конкретных уравнений магнитной гидродинамики с "ионной дисперсией" (2.I),(2.3) примет вид:

$$-\omega_{\vec{k}} c_{\vec{k}} \vec{v}_{\vec{k}}' - c_{\vec{k}} \frac{[[\vec{k}\,\vec{h}_k']H_0]}{4\pi n_0 m} = i\frac{\partial c_{\vec{k}}}{\partial t}\vec{v}_{\vec{k}} - \sum_{\vec{k}=\vec{k}'+\vec{k}''} c_{\vec{k}'} c_{\vec{k}''} \Big\{ (\vec{v}_{\vec{k}'}, \vec{k}'')\vec{v}_{\vec{k}''} -$$
$$- \frac{1}{4\pi n_0 m}\Big[[\vec{k}'\,\vec{h}_{k'}],\Big(\vec{h}_{k''} - \frac{n_{k''}}{n_0}H_0\Big)\Big]\Big\} A\,;$$
$$-\omega_k c_k \vec{h}_k' - c_k[\vec{k}[v_k' H_0]] - i\frac{mc}{e}\omega_k c_k[\vec{k}'\vec{v}_k'] =$$
$$= i\frac{\partial c_k}{\partial t}\Big(\vec{h}_k + i\frac{mc}{e}[\vec{k}\,\vec{v}_k]\Big) + \sum_{\vec{k}'+\vec{k}''=\vec{k}} c_{k'} c_{k''}\Big\{[\vec{k}[\vec{v}_{\vec{k}'}, \vec{h}_{k''}]] - \qquad (\text{П.I})$$
$$- i\frac{mc}{e}(\vec{v}_{k'}, k'')[\vec{k}\,\vec{v}_{k''}]\Big\} A\,;$$
$$-\omega_k c_k n_k' + n_0 c_k(\vec{k}\,v_k') = i\frac{\partial c_k}{\partial t} n_k' - \sum_{\vec{k}'+\vec{k}''=\vec{k}} c_{k'} c_{k''} n_{k'}'(\vec{v}_{k''}\cdot\vec{k})A\,;$$
$$A = e^{-i(\omega_{k'}+\omega_{k''}-\omega_k)t}$$

Легко проверить, что необходимо выписывать лишь компоненты по осям x и z уравнения (2.8). Третье уравнение эквивалентно уравнению $div\,\vec{h} = 0$, т.е. $h_x = -\frac{k_y}{k_x}h_y$. При равных нулю правых частях (П.I) дает нам уравнения
$$[-\omega_k - H_0(k)]\,\varphi_k = 0$$
для определения собственного вектора φ_k . В матричном виде оно имеет вид:

$$
\begin{pmatrix}
-\omega & 0 & 0 & -\dfrac{k^2 c_A^2}{k_y H_0} & 0 & 0 \\
0 & -\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\omega & 0 & -\dfrac{k_y c_A^2}{H_0} & 0 \\
-k_y H_0 & 0 & 0 & -\omega & i\dfrac{k_y^2 c_A^2}{\omega_H} & 0 \\
0 & 0 & -k_y H_0 & -i\dfrac{k^2 c_A^2}{\omega_H} & -\omega & 0 \\
k_x H_0 & k_y H_0 & 0 & 0 & 0 & -\omega
\end{pmatrix}
\qquad (\text{П}.2)
$$

Из (5.2) имеем формулы (2.II) и (2.I2).

Выписывая уравнение (4.I0) в явном виде с помощью (П.2) получаем решение сопряженного уравнения

$$
\tilde{\Psi} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6) \qquad (\text{П}.3)
$$

где $\eta_2 = 0,\ \eta_6 = 0,\ \eta_3 = -\dfrac{\omega_H}{i\omega}\left(\dfrac{\omega^2}{k^2c_A^2} - 1\right)\eta_1,\ \eta_4 = -\dfrac{\omega}{k_y H_0}\eta_1$

$$
\eta_5 = \frac{\omega_H}{i k_y H_0}\left(\frac{\omega^2}{k^2 c_A^2} - 1\right)\eta_1
$$

Умножая правую часть (П.I) на это решение и выражая v_x, v_z, h_x, h_y, n через h_z, получаем явное выражение для матричного элемента $V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''}$

$$
V_{\vec{k}\vec{k}'\vec{k}''} = i\,\frac{h_{k'z}\,h_{k''z}}{H_0\,h_{kz}}\;
\frac{\dfrac{k_y\,\omega_H}{k_y'\,k_y''}}{2\left[\left(1 - \dfrac{k_y^2c_A^2}{\omega^2}\right) + \dfrac{k_y^2 c_A^2}{\omega^2}\left(\dfrac{\omega^2}{k^2c_A^2} - 1\right)\right]}\times
$$

$$
\begin{aligned}
\times\Big\{ & A'A''\left[k_x(1-B) + k_x''\frac{\omega'}{\omega''}B'' + k_x'\frac{\omega''}{\omega'}B' + k_x''\frac{\omega\omega''}{k''^2c_A^2} + k_x'\frac{\omega\omega'}{k'^2c_A^2}\right] + \\
& + k_y''\frac{B}{A''}\left(\frac{k_x}{k_y} - \frac{\omega}{\omega''}\,\frac{k_x''k_y''c_A^2}{\omega_H^2}\,\frac{1}{B} + \frac{k_x''k_y''c_A^2}{\omega\omega''} - \frac{k_y''k_x'c_A^2}{\omega\omega'} - \right. \\
& \left. - \frac{k_y''}{k_y}\frac{\omega'}{\omega''}\,\frac{[\vec{k}'\vec{k}'']_z}{k'^2} - \frac{\omega'}{\omega}\,\frac{[\vec{k}''\vec{k}']_z}{k'^2}\right) + k_y'\frac{B}{A'}\left(\frac{k_x}{k_y} - \frac{\omega}{\omega'}\,\frac{k_x'k_y'c_A^2}{\omega_H^2}\,\frac{1}{B} + \right. \\
& \left. + \frac{k_x'k_y'c_A^2}{\omega\omega'} - \frac{k_y'k_x''c_A^2}{\omega\omega''} - \frac{k_y'}{k_y}\,\frac{\omega''}{\omega'}\,\frac{[\vec{k}\vec{k}'']_z}{k''^2} - \frac{\omega''}{\omega}\,\frac{[\vec{k}'\vec{k}'']_z}{k''^2}\right)
\end{aligned}
\qquad (\text{П}.4)
$$

где $A = 1 - \dfrac{k_y^2 c_A^2}{\omega^2}$, $B = \dfrac{\omega^2}{k^2 c_A^2} - 1$ и соответствующие величины с одним и двумя штрихами отличаются заменой $\omega, \vec{k}$ на $\omega', \vec{k}'$ и $\omega'', \vec{k}''$.

Литература

I. Р.З.Сагдеев. ЖТФ, 3I, II85, I96I.

Ia. C. Gardner, H. Goertzel, H. Grad, C. Morawetz, M. Rose a. H. Rubin, Report N 374, Geneva conference, 1958; L. Davies, R. Lüst, A. Schlüter., Zs. f. Naturforschg. 13a, 916 (1958); J. Adlam, J. Allen., Phil. Mag., 3, 448, 1958; R. Sagdeyev., Uppsala conference, 1959; C. Morawetz., Preprint, 1959; P.L. Auer, H. Hurwitz, Jr. R.W. Kilb, Preprint, 1961.

2. А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез (Nuclear Fusion), I, 82, I96I.

3. Р.З.Сагдеев. Диссертация. Новосибирск, I962 г.

4. В.Н.Ораевский, Р.З.Сагдеев, ЖТФ, в печати.

5. M. Camac, A. Kantrowitz, M. Litvak, R. Patrick a. H. Petschek., Preprint, Salzburg, 1961.

6. В.И.Карпман, Р.З.Сагдеев. ЖТФ, в печати.

7. В.Д.Шафранов. Электромагнитные волны в плазме. Препринт ИАЭ, М.I960.

8. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Москва, I958.

9. Р.В.Половин, УФН, 72, 3, I960.

Ответственный за выпуск Г.М.ЗАСЛАВСКИЙ

Подписано к печати 28.УI-I962г.МНО I763

Формат бумаги 60 x 84 = I/8

Тираж I00 экз.Заказ______бесплатно.

Отпечатано на ротапринте в Институте Гидродинамики
СО АН СССР.